Midtoets Lineaire Algebra I

19 December 2012

De toets bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. De puntenwaardering kunt u vinden aan het begin van de vraagstukken. U krijgt 11 punten gratis. Het totale aantal punten die u kunt bereiken is 100. Each question is also translated into English. You may answer in Dutch or English.

1. (Nederlands) [**4+4+4+4 Punten.**]

   Gegeven zijn de matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$$
   en de vector
$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \beta \end{pmatrix},$$
   met $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bekijk het stelsel vergelijkingen $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   (a) Bepaal alle waarden van α en β waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft.

   (b) Bepaal alle waarden van α en β waarvoor het stelsel strijdig is.

   (c) Bepaal alle waarden van α en β waarvoor het stelsel precies een oplossing heeft.

   (d) Bepaal de oplossing van het stelsel voor het geval dat $\alpha = 6$ en $\beta = 4$.

1. (English) [**4+4+4+4 Points.**]

   Let the matrix A and the vector $\mathbf{b}$ be defined as
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & \alpha \end{pmatrix}$$
   and
$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \beta \end{pmatrix},$$
   with $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Consider the system of equations $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   (a) Determine the values of α and β for which the system has infinitely many solutions.

   (b) Determine the values of α and β for which the system is inconsistent.

   (c) Determine the values of α and β for which the system has exactly one solution.

(d) Determine the solution of the system in the case where $\alpha = 6$ and $\beta = 4$.

2. (Nederlands) [**6+9 Punten.**]

   Een $n \times n$ matrix A heet *idempotent* als $A^2 = A\,A = A$. Een $n \times n$ matrix A heet een *involutie* als $A^2 = A\,A = I$ waarbij I de $n \times n$ identiteitsmatrix is.

   (a) Stel A is idempotent.
      i. Laat zien dat $I - A$ dan ook idempotent is.
      ii. Laat zien dat $I + A$ niet-singulier is en $(I + A)^{-1} = I - \frac{1}{2}A$.

   (b) Stel A is een involutie en laat

   $$B = \frac{1}{2}\big(I + A\big) \text{ en } C = \frac{1}{2}\big(I - A\big).$$

   Laat zien dat B en C idempotent zijn en dat $B\,C = 0$ waarbij 0 de 0-matrix is.

2. (English) [**6+9 Points.**]

   An $n \times n$ matrix A is called *idempotent* if $A^2 = A\,A = A$. An $n \times n$ matrix A is called an *involution* if $A^2 = A\,A = I$ where I is the $n \times n$ identity matrix.

   (a) Let A be idempotent.
      i. Show that $I - A$ is then also idempotent.
      ii. Show that $I + A$ is non-singular and $(I + A)^{-1} = I - \frac{1}{2}A$.

   (b) Let A be an involution and let

   $$B = \frac{1}{2}\big(I + A\big) \text{ and } C = \frac{1}{2}\big(I - A\big).$$

   Show that B and C are idempotent and that $B\,C = 0$ where 0 is the 0-matrix.

3. (Nederlands) [**4+4+4+4 Punten.**]

   Stel dat A een $n \times n$ matrix is.

   (a) Leg uit wat we bedoelen met de uitspraak dat A niet-singulier is, en leg uit wat we verstaan onder de inverse A^{-1} van A.

   (b) Stel A niet-singulier. Stel dat A^{-1} de inverse is van A. Stel B een $n \times n$ matrix. Toon aan: als $A\,B = I$ dan geldt $B = A^{-1}$.

   (c) Stel $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Toon aan: als A niet singulier is dan is aA niet-singulier en $(a\,A)^{-1} = \frac{1}{a}A^{-1}$.

   (d) Toon aan: als A niet-singulier is dan heeft het stelsel vergelijkingen $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alleen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ als oplossing.

3. (English) [**4+4+4+4 Points.**]

   Let A be an $n \times n$ matrix.

   (a) Explain what we mean with the statement that A is non-singular, and explain what we mean by the inverse A^{-1} of A.

   (b) Let A be non-singular. Let A^{-1} be the inverse of A. Let B be an $n \times n$ matrix. Prove that if $A\,B = I$ then $B = A^{-1}$.

(c) Let $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Show that if A is non singular then $a\,A$ is non-singular and $(a\,A)^{-1} = \frac{1}{a} A^{-1}$.

(d) Show that if A is non-singular then the system of equations $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has only $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ as a solution.

4. (Nederlands) [**6+4 Punten.**]

Bekijk de 3×3 Vandermonde matrix

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

.

(a) Laat zien dat $\det(V) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

(b) Bepaal alle waarden van x_1, x_2 en x_3 waarvoor V singulier is.

4. (English) [**6+4 Points.**]

Consider the 3×3 Vandermonde matrix

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

.

(a) Show that $\det(V) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

(b) Determine the values of x_1, x_2 and x_3 for which V is singular.

5. (Nederlands) [**4+4+4+4 Punten.**]

Stel $\mathcal{V}$ een vectorruimte.

(a) Toon aan: $\mathcal{V}$ bevat precies een 0-vector, d.w.z. een element $\mathbf{0}$ met de eigenschap dat voor alle $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ geldt: $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.

(b) Toon aan dat elke eindige verzameling vectoren in $\mathcal{V}$ die de 0-vector bevat lineair afhankelijk is.

(c) Stel $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineair onafhankelijke vectoren in $\mathcal{V}$. Bewijs dat $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1\}$ lineair onafhankelijk zijn.

(d) Laat zien dat $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1)$.

5. (English) [**4+4+4+4 Points.**]

Let $\mathcal{V}$ be a vector space.

(a) Prove: $\mathcal{V}$ contains exactly one 0-vector, i.e. one element $\mathbf{0}$ with the property that for all $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ it holds that $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.

(b) Show that every finite set of vectors in $\mathcal{V}$ which contains the 0-vector is linearly dependent.

(c) Let $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ be linearly independent vectors in $\mathcal{V}$. Prove that $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1\}$ is linearly independent.

(d) Show that $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1)$.

6. (Nederlands) [**10+6 Punten.**]

Zij M de verzameling van $n \times n$ scheef-symmetrische matrices, d.w.z.

$$M = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, A^T = -A\}\,.$$

(a) Laat zien dat M met de gewone optelling van matrices en de gewone vermenigvuldiging van matrices met scalairen een vectorruimte vormt.

(b) Bepaal een basis van M voor het geval $n = 3$.

6. (English) [**10+6 Points.**]

Let M be the set of $n \times n$ anti-symmetric matrices, i.e.

$$M = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, A^T = -A\}\,.$$

(a) Show that M together with the usual addition of matrices and the usual multiplication of matrices with scalars forms a vector space.

(b) Determine a basis of M for the case $n = 3$.